



模态分析的实现与常见问题

筑信达 吴文博

模态是指弹性结构的固有振动形状，也被称为振型，其包含了模态周期和模态形状。模态分析可以帮助用户获取结构的动力特性，判断结构的薄弱位置；也可用于后续的动力分析，如反应谱分析、线性模态叠加法时程分析等；还是模型检查的一种重要手段（参考第 27 期技术通讯文章“ETABS 常见警告及对策”）。可以说模态分析是了解结构的一种非常重要的手段。

用户可以通过【定义>荷载工况】命令添加模态工况，并且 ETABS/SAP2000 提供了两种模态的求解方法：特征值向量法和 RITZ 向量法。下文将对两种方法做详细介绍。

1. 特征值向量法

ETABS/SAP2000 中特征值向量法采用的是子空间迭代法进行特征值与特征向量的求解，具体特征值向量法的定义如图 1 所示。用户需要区域 1 中选择工况类型为“Modal”，子类型为“Eigen”。区域 2 中，表示模态分析时使用的刚度，当结构中存在索或类似构件时，常常需要通过施工模拟或其它非线性工况模拟出索的真实刚度作为工作态，这时模态分析就可以使用第二个选项继承非线性刚度做后续的分析，但需要注意的是，这种继承仅限于刚度的继承，不包含荷载。区域 3 在一般情况下并不需要设置，只在分析中需要考虑静力修正时，可以打开“高级”勾选项进行设置。用户可以为任何加速度荷载或荷载模式指定程序进行静力修正模态计算，对于地震作用分析可按图中所示，仅考虑加速度荷载即可，关于静力修正选项的具体内容详见后文。区域 4 中，最重要的是设置最大和最小模态数量，而模态数量可依据《建筑抗震设计规范》GB 50011-2010 5.2.3 条取前 9~15 个模态，或按照《高层建筑混凝土结构技术规程》JGJ 3-2010 5.1.13 条模态数量使各模态参与质量之和不小于总质量的 90%（即质量参与系数达到 0.9），这也是实际工程中常用的确定模态数量的方法，程序不会自动增加模态数量使其满足质量参与系数达到 0.9，因此用户需要通过查看质量参与系数来确认模态数量是否足够，如果不够需增加模态数量，直至质量参与系数达到 0.9。

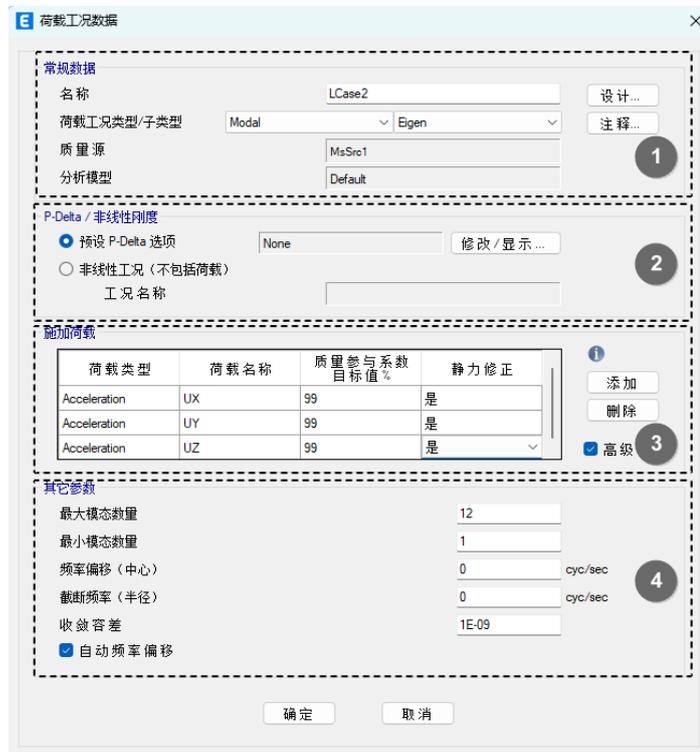


图 1 特征值向量法



1.1 静力修正

当使用反应谱法或者线性模态叠加时程分析法时，求出全部模态才可以得到精确的结果，但是对于大型结构，求解出所有的模态是非常困难的，也没有必要，一般情况下只需求解出部分低阶模态，使其质量参与系数达到 90%即可达到较好的精度，这样高阶模态的响应就被舍弃掉了。实际中，对于常见的动力荷载形式，如地震作用、风荷载等，以低频成分为主，高频成分较少，如图 2 所示。并且一些理论分析也指出，在低频荷载作用下，高阶模态引起的动力响应通常很小，如图 3 所示，图中， β 为荷载频率与结构频率的比值， D 为结构位移放大系数。由图 3 可以看出，在低频荷载作用下，当结构频率比较大时， β 值趋近于 0，此时结构的动力放大系数非常接近于 1，这样就可以使用静力响应近似地替代动力响应，这是一种对截断的高频响应的修正，也是静力修正的主要原理。关于静力修正的具体表达本文限于篇幅不做讨论，用户可参考文献 1 的相关内容。

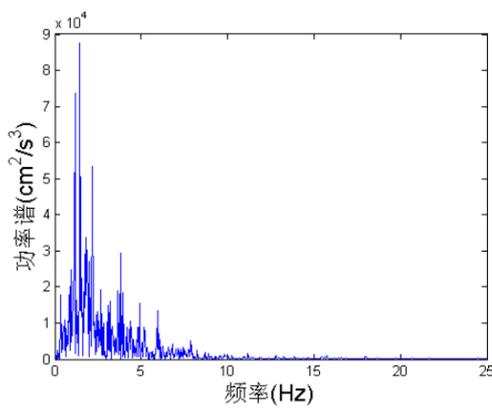


图 2 EL CENTRO 波的功率谱

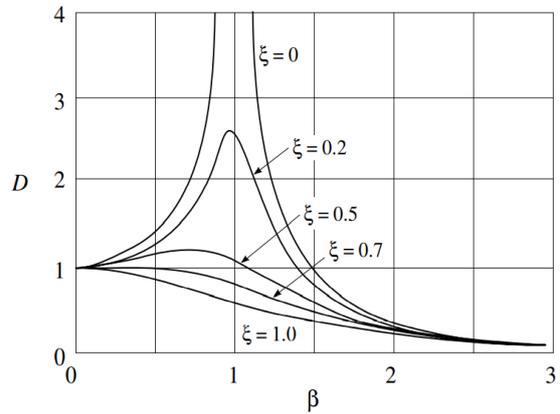
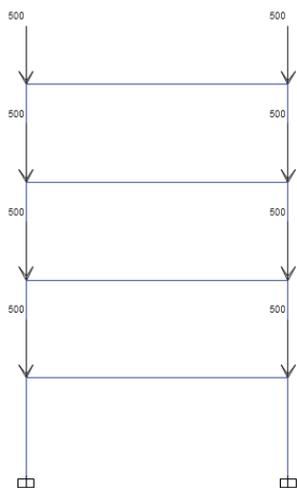


图 3 频率比与动力放大系数的关系

本文通过一个例子来阐述静力修正的作用，模型为的平面框架，框架跨度为 8 米，各层高度为 3 米，梁、柱截面均为 HW300×300×10×15，钢材牌号为 Q235，各层柱顶节点施加竖向荷载 P，大小分别为 500kN，质量源由荷载 P 转化而来，此时结构的基本周期和质量参与系数如图 4 所示：



Case	Mode	Period sec	UY	SumUY
Modal	1	2.516	0.8459	0.8459
Modal	2	0.796	0.1058	0.9518
Modal	3	0.45	0.0376	0.9894
Modal	4	0.324	0.0106	1

图 4 平面框架示意图与各阶模态的质量参与系数

从上图可以看出，当模态数量为 2 时，结构的质量参与系数已经超过 95%，满足规范的要求，现在定义三个模态工况，分别为工况 Modal A，模态数量为 2 个；工况 Modal B，模态数量为 2 个同时考虑 UY 方向加速度的静力修正；工况 Modal C 模态数量为 4 个，基于这三个工况进行线性模态时程分析。输入的加速度时程为正弦函数，周期为 2 秒，加速度峰值为 1g，因工况 Modal C 包含了所有可能的模态，可视为精确值，具体计算结果如下：



表 1 不同工况下结构楼层剪力/kN

楼层	Modal A	Modal B	Modal C	$\frac{ModalC - ModalA}{ModalC}$	$\frac{ModalC - ModalB}{ModalC}$
4	4108.9	3990.7	3989.5	-2.99%	-0.03%
3	7148.2	7191.3	7173.5	0.35%	-0.25%
2	8815.6	9018.4	8993.0	1.97%	-0.28%
1	9378.7	9126.2	9188.1	-2.07%	0.68%

从上述计算结果可以看出，静力修正用较少的模态数量即可得到较为精确的结果，当作用于加速度荷载时，静力修正模态即为质量丢失模态或残余质量模态，这在美国原子能机构的 REGULATORY GUIDE 1.92 Revision 2 中需要考虑。需要注意的是，当荷载高频成分占主导时，例如碰撞或爆炸分析，静力修正方法将不再拥有更好的精度。

2. 力相关的 RITZ 向量法

特征向量法是使用准确的自由振动模态来解决结构动力分析，但是在一些情况下，这并不是最优的方法，根据文献 2 的阐述，可以归纳为以下原因：

(1) 对于大型的结构系统，求解自由振动模态和频率的特征值问题可能需要大量的计算工作。例如，当结构底部质量较大，且刚度也较大的情况，如图 5 所示，结构虽然不大，但是由于底部的水池重量较大，且刚度也较大，仍需要 150 个模态才可以保证 X 和 Y 方向的质量参与系数达到 90%。类似的，如果用户将地下室也带入至模型中进行分析时，常常也需要大量的模态。

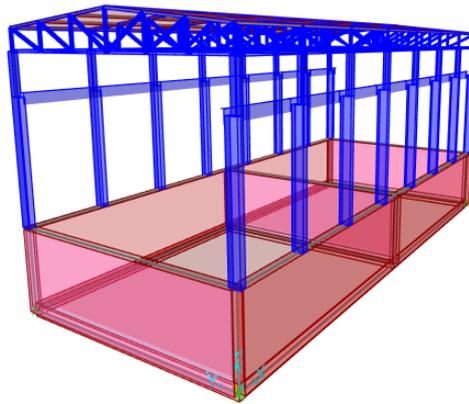


图 5 某泵房结构

再例如，结构需要进行竖向地震作用分析时，由于竖向刚度通常较水平刚度大很多，竖向的振动频率也相对很大，比较靠后，这时就需要非常多的模态数量满足 Z 向质量参与系数达到 90% 的要求。

(2) 在自由振动模态的计算中，完全忽视荷载的空间分布。因此，计算的许多模态对荷载是正交的并且不参与动态响应。例如，对于质量和刚度对称的结构，当进行 X 向水平地震分析时，Y 向的模态与荷载正交，并不会产生动力响应。类似的，当进行水平地震分析时，一些竖向振动的局部模态也不会产生动力响应，这在一些下部为混凝土结构，上部为空间结构的建筑中比较常见。

为解决上述问题，ETABS 提供了 RITZ 向量法求解模态，文献 2 已证明，基于唯一一组荷载相关向量的动力分析，比使用相同数量的特征向量法，可产生更精确的结果，关于 RITZ 向量法的理论部分，可参考文献 2，本文不再复述。类似于特征值向量法，RITZ 向量法的定义如图 6 所示。



常规数据

名称: Modal-RITZ 设计...

荷载工况类型/子类型: Modal Ritz 注释...

质量源: MsSrc1

分析模型: Default 1

P-Delta / 非线性刚度

预设 P-Delta 选项: None 修改/显示...

非线性工况 (不包括荷载)

工况名称:

2

施加荷载

荷载类型	荷载名称	最大循环数	动力参与系数 目标值 %
Acceleration	UX	0	99
Acceleration	UY	0	99
Acceleration	UZ	0	99

3
添加
删除

其它参数

最大模态数量: 4

最小模态数量:

确定
取消

图 6 RITZ 向量法的定义

RITZ 向量法的定义与特征值向量法在区域 1、区域 2 和区域 4 的定义是相似，但是区域 3 是有所不同的，用户可以定义任意数量的初始荷载向量。每一个荷载向量可以是如下的一种：

(1) 全局 X、Y、Z 方向的加速度，对应荷载类型为“Acceleration”，一般用于反应谱分析，或者地震激励的线性模态时程分析。

(2) 某种荷载模式，对应的荷载类型为“Load Pattern”，可用于一些力加载的时程分析中，例如，舒适度分析、风时程分析等情况。

(3) 内置的非线性变形荷载，对应荷载类型为“Link”，这种荷载形式多用于使用连接单元的减隔震分析中，常用于 FNA 法中，由于 FNA 法将连接单元的非线性力移动到方程的右端，作为荷载考虑，因此需要考虑连接单元激发的模态。具体可参考文献 2 中 FNA 法的相关内容。

第一代 Ritz 向量是对应于初始荷载向量的静态位移向量，其余的向量由这样的循环关系确定：由先前求得的 Ritz 向量和质量矩阵的乘积作为下次静力求解的荷载向量。每一次静力求解称为一个循环数。某一荷载的循环数越大，那么会生成更多与这个荷载相关的 RITZ 向量，也会得到更多与这个荷载有关的模态。例如，某 8 层混凝土框架结构，如图 7 所示。

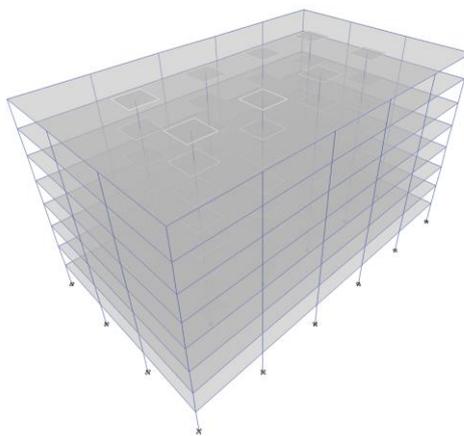


图 7 某框架结构三维模型示意图



使用 RITZ 向量方法进行模态分析，初始荷载考虑加速度 UX 和加速度 UZ，模态总数为 4 个。其中模态工况“Modal A”中，加速度荷载 UX 和加速度荷载 UZ 的循环数均为 2，模态工况“Modal B”中，加速度荷载 UX 和加速度荷载 UZ 的循环数分别为 3 和 1，两个模态工况的定义如图 8 所示：



图 8 模态 A (左) 与模态 B (右) 工况定义

计算得到的质量参与系数如图 9 所示，可以看出“Modal A”工况中，前 2 阶模态对应的是 X 向的模态，后 2 阶对应的是 Z 向的模态，“Modal B”工况中，前 3 阶对应的是 X 向模态，第 4 阶对应的是 Z 向的模态，这与工况中各个初始荷载的循环数相吻合。由于“Modal B”工况中加速度 UX 荷载的循环数更多，因此 X 向的质量参与系数也会更多一些。而 Y 方向由于没有相应的初始荷载，所以并未激发出 Y 向的模态，所以 RITZ 向量法包含有静力凝聚的效果。

Case	Mode	Period sec	UX	UY	UZ	SumUX	SumUY	SumUZ
ModalA	1	2.389	0.844	0	0	0.844	0	0
ModalA	2	0.75	0.1242	0	0	0.9683	0	0
ModalA	3	0.267	0	0.0002	0.7386	0.9683	0.0002	0.7386
ModalA	4	0.157	0	0.0057	0.2042	0.9683	0.0059	0.9429
ModalB	1	2.389	0.844	0	0	0.844	0	0
ModalB	2	0.797	0.0952	2.429E-05	0	0.9392	2.429E-05	0
ModalB	3	0.422	0.0539	0.0004	0	0.9932	0.0004	0
ModalB	4	0.259	0	0	0.8579	0.9932	0.0004	0.8579

图 9 模态 A 工况与模态 B 工况的质量参与系数

用户可以通过调整某个荷载的循环数，使其得到更大的质量参与系数，例如，当需验算竖向地震作用时，可将 X 向和 Y 向加速度荷载的循环代数设置为 10 个，而 Z 向的加速度荷载的循环数设置为 20 个，这样可以得到更多的竖向质量参与系数。默认情况下，循环数为 0，表示不限制循环次数，这对于绝大多数情况是合适的。

RITZ 向量法包含有静力凝聚、Guyan 缩减、高阶模态截断时的静力修正等数字技术的优点，因此 RITZ 向量法比使用相同模态数量的特征向量法，可产生更精确的结果。以图 5 模型为例，分别使用特征值向量法和 RITZ 向量法计算反应谱工况下的基底剪力，其中 RITZ 向量法仅考虑加速度 UX 和加速度 UY 作为初始荷载，计算结果如表 2 所示。



表 2 特征值向量法与 RITZ 向量法在不同模态数量下的计算结果对比

	模态数量						
	特征值向量法		RITZ 向量法				
	150	500	10	20	30	40	50
X 向质量参与系数	0.984	0.997	0.818	0.976	0.990	0.994	0.996
Y 向质量参与系数	0.910	0.997	0.927	0.983	0.989	0.993	0.997
X 向地震基底剪力 (kN)	2624	2625	5000	3201	2607	2710	2616
Y 向地震基底剪力 (kN)	2525	2545	3344	2647	2522	2526	2550

由上表可以看出，RITZ 向量可以使用更少的模态数量得到更高的质量参与系数，进而得到更加精确的基底剪力。

3. 模态结果查看

用户可通过【显示>表格>ANALYSIS RESULTS>Structure Output> Modal Information】命令查看模态分析的结果，程序共提供了六种结果。

1) 模态周期与频率 (Modal Periods And Frequencies)。程序会提供各阶模态的周期、频率、圆频率以及特征值。

2) 模态质量参与系数 (Modal Participating Mass Ratios)。模态质量参与系数是模态参与质量与结构总质量的比值，而模态参与质量又被称为基底剪力有效模态质量，用来衡量加速度荷载下，模态对基底剪力的贡献。程序会输出各阶模态下各分量 (UX、UY、UZ、RX、RY、RZ) 下质量参与系数，也会输出累积的质量参与系数。通常情况下，UX、UY、UZ (如果需要考虑竖向地震作用)、RZ 的累积质量参与系数应达到 90% 以上，否则应增加模态数量。关于模态质量的定义可以参考文献 1 中的描述，也可理解为质量在单位加速度荷载作用下进行模态展开后，各模态剪力与总剪力的比值，如图 10 所示，对于第一阶模态的剪力为 $1.252m+1.150m+0.956m+0.684m+0.356m=4.398m$ ，总剪力为 $5m$ ，则质量参与系数为 $4.398m/5m=0.8796$ 。

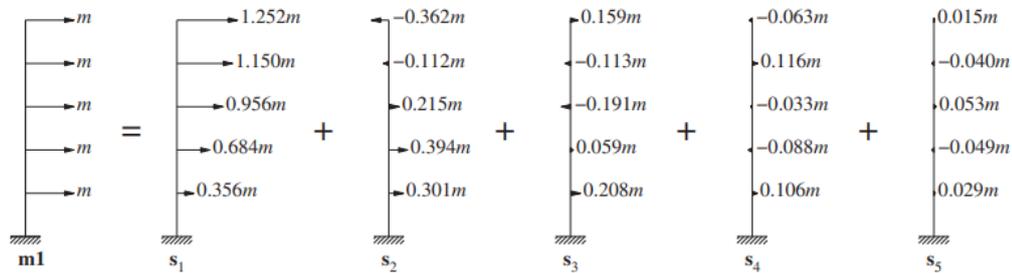


图 10 质量在单位加速度荷载作用下的模态展开

质量参与系数原则上仅适用地震作用的误差估算参数，并不能作为其他类型荷载的误差估算参数，例如结构上的节点荷载，如图 11 所示。

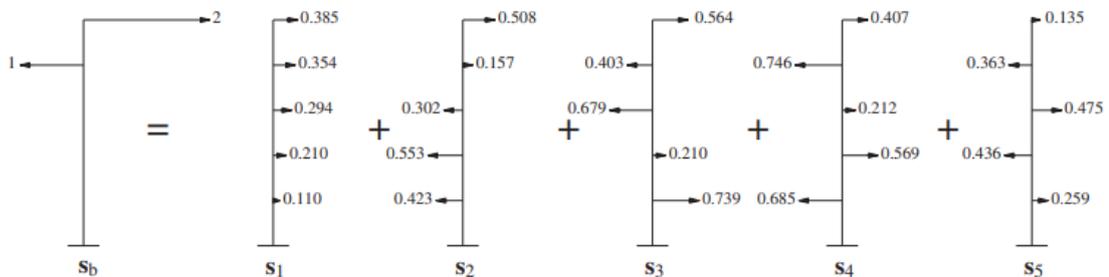


图 11 某节点荷载作用下的模态展开

从上可以看出，对于加速度荷载，高阶模态的贡献不大，可以忽略掉，但是对于某些节点荷载，这些高阶模态仍会对某些楼层剪力或者基底剪力产生重要影响，即便累积质量参与系数已经很大。

3) 荷载参与系数 (Modal Load Participating Ratios)。荷载参与系数提供了如何评价所计算的模态对于表达时程分析响应



的满足程度，这项评价在程序中并不是按照每一阶模态进行评价，而是对每一种荷载类型进行评价。荷载参与系数又分为静力荷载参与系数、动力荷载参与系数，分别用于衡量计算的模态表达给定静力荷载响应的优劣程度和表达给定动力荷载响应的优劣程度。关于静力荷载参与系数和动力荷载参与系数的定义及计算方法请参考文献 2。

静力荷载参与系数是给出了前 N 阶模态所捕捉到的应变能占总应变能的比例，当采用拟静力时程分析求解静力解时，对于任何静力荷载和非线性分析时的所有非线性变形荷载，静力荷载参与系数值应接近于 100%。而对于包含静力修正的特征向量分析以及 RITZ 向量分析，静力荷载参与系数是 100%。

动力荷载参与系数是质量参与系数概念的延伸，当荷载形式为加速度荷载时，动力荷载参与系数与质量参与系数相同。动力荷载参与系数只衡量模态如何捕捉荷载的空间特性，而非其时间的特性。因此，动力荷载参与系数只是一个用于描述是否已计算足够模态的数量。用户仍必须要检查对于不同数量模态的各个动力荷载引起的响应，来确定是否采用了足够的模态。威尔逊教授曾建议对 RITZ 向量法动力荷载参与系数在一般分析中应达到 95%以上，而另一种常用办法是增加一定的模态数量，观察所需的计算结果是否有明显的变化，如果结果稳定，就不必再次增加模态数量。

4) 模态方向因子 (Modal Direction Factors)。模态方向因子主要是用于判断模态的方向。依据《高层建筑混凝土结构技术规程》JGJ 3-2010 3.4.5 条，高层结构应该控制结构扭转为主的第一自振周期 T_t 与平动为主的第一自振周期 T_1 之比，而 T_t 的判断就可以借助模态方向因子，观察 RZ 输出占主导的模态即可。

5) 模态参与系数 (Modal Participating Ratios)。模态参与系数是三个加速度荷载和模态的点积。程序会输出各方向的模态参与系数以及模态质量和模态刚度。

6) 反应谱分析模态信息 (Response Spectrum Modal Info)。此表仅在反应谱分析之后输出，输出结果包括各阶模态下的阻尼、谱加速度、模态振幅。

4. 小结

本文介绍特征值向量法的基本定义，简单介绍了静力修正的基本原理，静力修正用较少的模态数量即可得到较为精确的结果；还介绍了 RITZ 向量法的基本定义，荷载与循环数的作用机制，RITZ 向量法包含有静力凝聚、Guyan 缩减、高阶模态截断时的静力修正等数字技术的优点，因此 RITZ 向量法比使用相同模态数量的特征向量法，可产生更精确的结果。最后还介绍了模态结果的查看，指出了质量参与系数和荷载参与系数的适用范围。

参考资料

[1] Anil K.Chopra 结构动力学 (理论及其在工程中的应用第 5 版) [M].2020

[2] Wilson E L. Static and Dynamic Analysis of Structures [M], Fourth Edition (Revised June 2010). Computers and Structures Inc., Berkeley USA, 2010.