

瑞利阻尼的应用

筑信达 吴文博

瑞利 (Rayleigh) 阻尼假设结构的阻尼矩阵是质量矩阵和刚度矩阵的组合, 因其简单、方便, 而在结构动力分析中得到了广泛应用。在 SAP2000 或 ETABS 的时程分析中, 用户可以在直接积分法或 FNA 法中使用瑞利阻尼。本文简单介绍瑞利阻尼的原理, 并通过案例分析使用瑞利阻尼时常见的误区。

瑞利阻尼的基本原理

就时程分析而言, 当采用线性模态叠加法时, 通常会采用振型阻尼比 ξ , 因其物理意义明确且十分方便; 但是对于直接积分法则需要用阻尼矩阵的方法来表示结构的阻尼。因为阵型对质量和刚度都是正交的, 建立阻尼矩阵最简单的方法是使其与质量矩阵或刚度矩阵成比例, 与质量矩阵成比例我们可以称之为质量比例阻尼, 与刚度矩阵成比例可以称之为刚度比例阻尼。此时阻尼矩阵可以表示为:

$$C = a_0 M \text{ 或 } C = a_1 K$$

如图 1 所示, 刚度比例阻尼与频率呈线性比例, 与结构变形相关, 可极大程度的衰减掉高频成分; 质量比例阻尼和周期成线性比例, 与结构运动相关, 可极大程度的衰减掉长周期成分, 因此一旦结构主要振型对应的频率范围很宽时, 不同频率对应的阻尼比差异将会很大, 这会使不同振型的相对响应发生严重畸变。

如果假设阻尼与质量矩阵和刚度矩阵的组合成比例则可以得到一个明显改进的结果, 这种阻尼称为瑞利 (Rayleigh) 阻尼其表达式如下:

$$C = a_0 M + a_1 K$$

只要知道两个频率点 ω_m 和 ω_n 即其相关的阻尼比 ξ_m 和 ξ_n 就可以求解瑞利阻尼的系数 a_0 和 a_1 。在程序中, 用户可以手动计算相应系数或者输入频率 (或周期) 值和对应的阻尼比由程序自动计算, 如图 2。

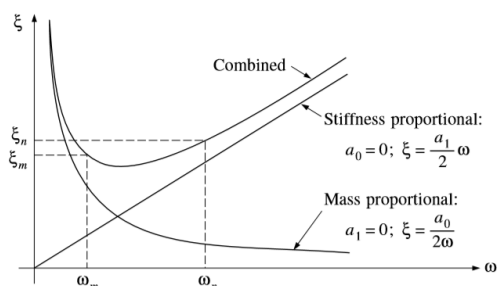


图 1 阻尼比与频率的关系

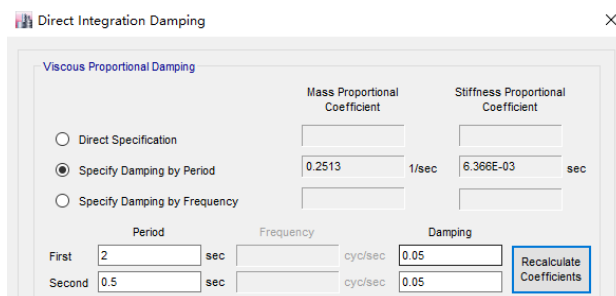


图 2 瑞利 (Rayleigh) 阻尼定义

如图 1 所示, 在频段 (ω_m, ω_n) 内, 阻尼比略小于给定的阻尼比, 在该频段内由于计算的阻尼略小于实际阻尼, 结构的反应将略大于实际的反应, 这样的计算结果对工程而言是安全的。如果两个频率点选择的好, 则可以保证这种增大程度很小。在频段 (ω_m, ω_n) 以外, 其阻尼比将迅速增大, 这样频率成分的振动反应会被抑制, 其计算值将远远小于实际值, 但这一部分通常是不需要考虑的, 或可以忽略的。但是, 如果对结构设计有重要影响的频率分量落在频段 (ω_m, ω_n) 以外, 则可能导致严重的不安全。因此随意找两个频率点去确定 a_0 和 a_1 是不可取的, 可能会导致严重的误判。

CSI 曾经建议图 2 所示的两个周期值分别取为 $0.9T_1$ 和 $0.2T_1$ (取 $0.9T_1$ 而非 T_1 是为了防止阻尼偏小过多), 也有人建议保守的取为 T_1 和 $T_{90\%}$ (质量参与系数达到 90% 时对应的周期)。对于这两个周期 (或频率) 的取值, 应慎之又慎, 必要的情况下, 应调整周期的取值, 查看结构的响应对其是否敏感。现以两个案例说明一下瑞利阻尼取值对分析的影响。

案例 1

模型为一桥梁结构, 桥面梁与桥墩之间设有摩擦摆隔震支座, 如图 3 所示。某用户欲对比 FNA 法和非线性直接积分法的结果差异, 因此将两者均设置为瑞利阻尼, 瑞利阻尼定义参考了 CSI 的建议值, 如图 4, 结构基本周期约为 3.0s。



图3 有桥墩模型

比例系数

质量比例系数 刚度比例系数

直接指定

基于周期指定

基于频率指定

	周期	频率	阻尼比
一	2.7		0.05
二	0.6		0.05

重新计算

图4 模型中瑞利阻尼定义

同时，用户又做了一个对比模型，此模型中不包含桥墩，其他设置与有桥墩结构模型相同。如图5

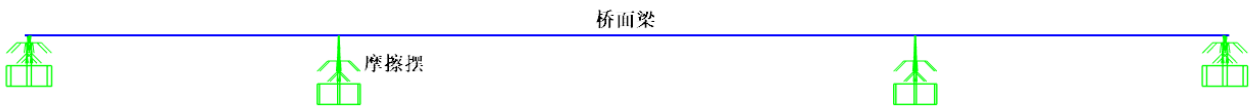


图5 无桥墩模型

计算后发现，对于无桥墩模型，那么 FNA 法与非线性直接积分法的计算结果非常一致，如图6；而对于有桥墩模型，那么 FNA 法与直接积分法的计算结果差异很大，如图7。所以用户怀疑，是不是摩擦摆隔震支座不能用于层间隔震？

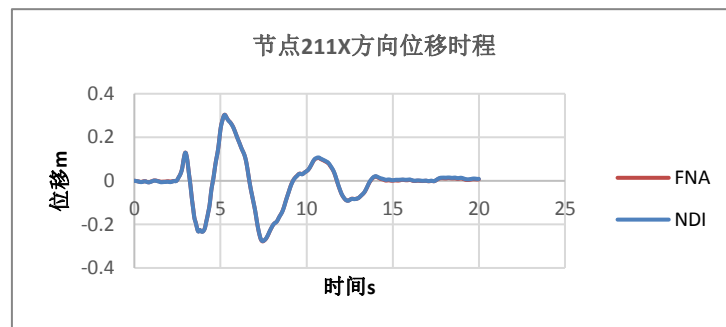


图6 无桥墩模型节点位移时程

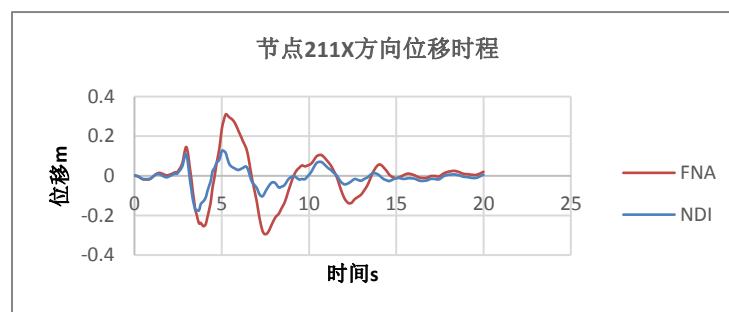


图7 有桥墩模型节点位移时程



经过我们仔细的检查发现，并非是摩擦摆隔震支座的问题，而是相同的瑞利阻尼定义对两个模型的影响不同。首先我们先观察一下有桥墩模型与无桥墩模型的振型质量参与系数。

表 1 有桥墩模型的振型质量参与系数

模态	周期	UX	UY	SumUX	SumUY
1	2.971305	0.6768	0.00014	0.6768	0.00014
2	2.833205	0.0004	0.65907	0.67719	0.65921
3	2.65675	0.00235	0.01866	0.67954	0.67786
5	1.053782	0.00002605	3.172E-08	0.67957	0.67861
6	0.537385	0.00384	0.00002582	0.68341	0.67863
67	0.023814	0.00000131	0.000000252	0.81062	0.80592
68	0.02357	0.000003329	0.000001275	0.81062	0.80592
204	0.006608	0.00005157	0.01215	0.86158	0.90348
205	0.006585	0.00055	0.00025	0.86214	0.90373
206	0.006424	0.0001	4.853E-09	0.86224	0.90373

表 2 无桥墩模型的振型质量参与系数

模态	周期	UX	UY	SumUX	SumUY
1	2.837936	0.99579	0.000000577	0.99579	0.000000577
2	2.666147	5.822E-07	0.99912	0.99579	0.99912
3	2.553622	0.00399	5.668E-09	0.99978	0.99912

查看模型后我们发现，两个模型的基本周期相差不大，由摩擦摆参数控制，有桥墩模型略偏柔，这是桥墩为有限刚度造成的，也是合理的，但是质量参与系数的分布则差别非常大。对于无桥墩模型，由于摩擦摆的存在，第一阶阵型就获得了 99.5% 的质量参与系数；而对于有桥墩模型，由于桥墩的质量和刚度很大，导致其周期至 0.006s 左右时，质量参与系数才达到 90%。因此可以判定，无桥墩模型使用图 4 中的瑞利阻尼定义没有太大问题，但是对于有桥墩模型则会高估阻尼的作用，导致高频部分被过分衰减。因此将图 4 中的瑞利阻尼定义为图 8 所示，计算结果将趋于合理，如图 9。

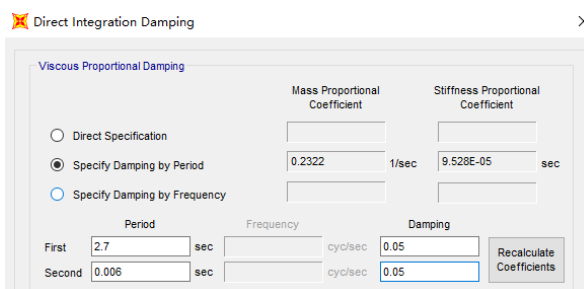


图 8 有桥墩模型调整后的瑞利阻尼

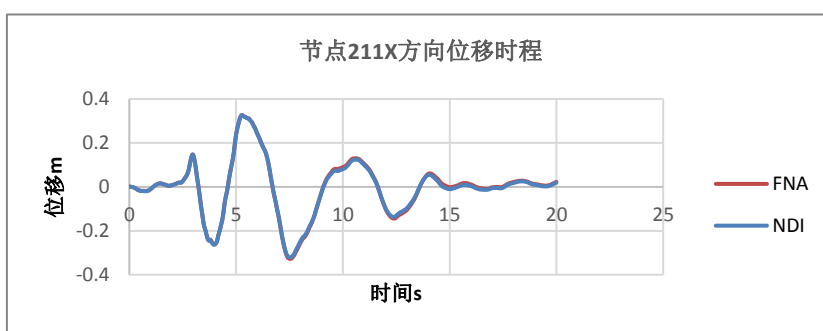


图 9 有桥墩模型调整后的节点位移时程



至此用户提出第二个问题，为什么不恰当的瑞利阻尼对 FNA 法的影响要小于非线性直接积分法呢？这是因为 FNA 法的阻尼作用机制与非线性直接积分法略有不同。对于直接积分法，是使用阻尼矩阵直接进行分析，而 FNA 法则会将瑞利阻尼转化为各振型阻尼比去进行计算，阻尼比不超过临界阻尼 1，一旦阻尼比按计算超过 1，程序会自动设置为 0.99995，如图 6 所示。从图 10 中，我们可以看出来 67 阶模态对应的阻尼比已经达到 1，但是此时对应的质量参与系数仅 80%，所以会出现非线性直接积分法的计算结果小于 FNA 法。

分析完成 - 改5

文件:	C:\Users\wuwb\Desktop\技术通讯-瑞丽阻尼模型改5.sdb		
开始:	2019/5/23 10:26:53	用时:	00:01:10
结束:	2019/5/23 10:28:04	状态:	Done - Analysis Complete

57	0.029468	0.833392		
58	0.029064	0.844960		
59	0.028735	0.854647		
60	0.027828	0.892465		
61	0.026938	0.911592		
62	0.026817	0.915712		
63	0.026226	0.936302		
64	0.026211	0.936866		
65	0.024978	0.983081		
66	0.024618	0.997412		
67	0.023814	1.031073	SET TO	0.999950
68	0.023570	1.041730	SET TO	0.999950
69	0.023409	1.048909	SET TO	0.999950
70	0.022671	1.083008	SET TO	0.999950

图 10 FNA 法阻尼比计算

案例 2

该模型为一个 6 层框架结构，使用 ETABS 进行大震弹塑性分析，时程工况使用直接积分法，阻尼取为瑞利阻尼，计算完成后查看杆件的弯矩图，发现在塑性铰处会出现非常明显弯矩突变，如图 11。这看起来与瑞利阻尼毫不相干，但是我们检查模型后发现，瑞利阻尼是造成弯矩突变的根本原因。

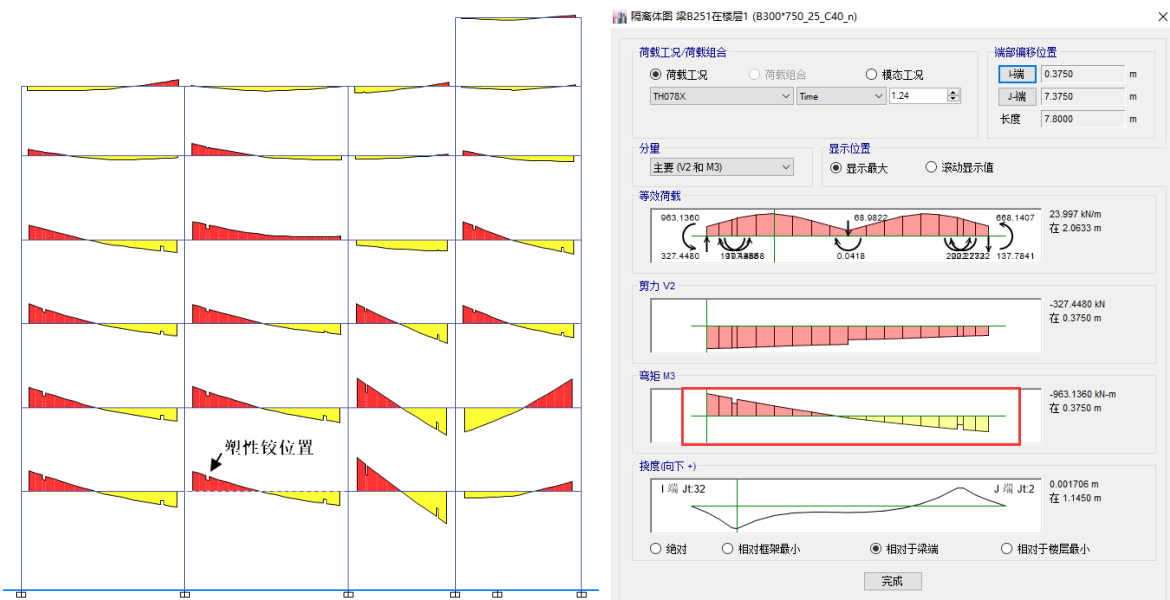


图 11 时程工况下框架弯矩图

在默认情况下，程序会对框架单元在塑性铰位置进行细分，塑性铰的相对长度对应为一个单元。而塑性铰相对长度的默认值为 0.02，此时这段细分杆件的线刚度远大于剩余杆件，导致局部形成过大的刚度阻尼，进而导致此处的框架内力急剧降低，所以出现图 11 所示的内力突变。若想避免这个现象，可以通过塑性铰覆盖项（图 12）来增大自动细分的相对长度（如取为 0.1）或者取消自动细分。更多介绍参见知识库文档[塑性铰覆盖项](#)。

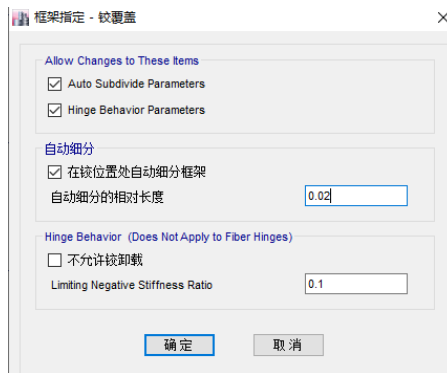


图 12 铰覆盖定义

用于直接积分法的模态阻尼

在 ETABSV17 和 SAP2000V21 版本中，程序新添加了用于直接积分法的模态阻尼，这类阻尼并非是我们通常使用的阻尼比，仍然是以阻尼矩阵的形式参与计算，其表达式如下：

$$C_{modal} = \sum_{i=1}^N \frac{4\pi}{T_i} \xi_i (M\phi_i)(M\phi_i)^T$$

其中 T_i 、 ξ_i 和 ϕ_i 是模态 i 的周期、阻尼系数和振型； N 是模态总数。

模态阻尼矩阵 C_{modal} 是一个完全密集的矩阵，模态阻尼只对模态荷载工况相关的模态位移提供阻尼。直接积分时程分析中的总自由度数几乎都比所提供的模态数量要大得多，因此可能存在欠阻尼或无阻尼的位移模式。为了防止模型的高频为欠阻尼，建议在荷载工况中提供一个小的非模态的刚度比例阻尼。

例如，如果模态阻尼影响的最高阶模态频率为 f ，可以指定频率 f 的刚度比例阻尼为 0.2%，指定频率 $10f$ 为 2%，这样给不受模态阻尼衰减的高频提供阻尼，阻尼采用的实际值应当由结构本身和工程判断来确定（如图 13）。

相比于瑞利阻尼，模态阻尼可以提供更加“均匀”的阻尼，当合理设置模态数量时，可避免案例 1 与案例 2 中的情况发生，但是随着模态数量的增加，计算时间也会显著的增加，所以用户应有所取舍。

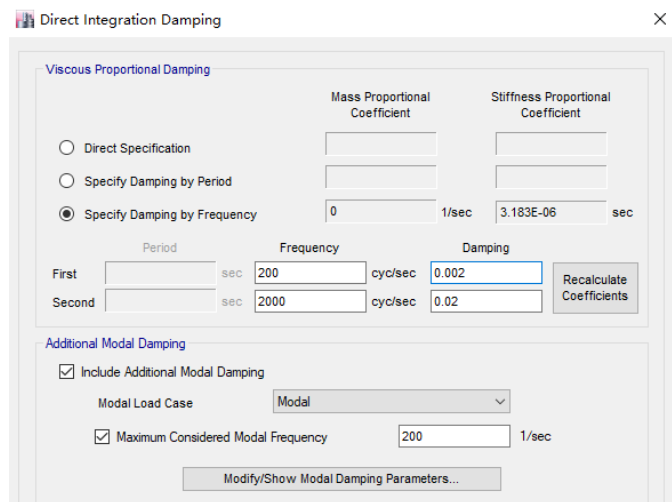


图 13 用于直接积分法的模态阻尼设置

结语

- 1) 当使用瑞利阻尼时，相应周期点（或频率点）的选取应结合结构的具体情况使用，应避免过大或过小的阻尼对计算结果产生明显的影响。
- 2) 局部过刚的构件会引起过大的阻尼力，较覆盖的设置可能对构件内力产生较大的影响。
- 3) 程序最近版本新增的用于直接积分法的模态阻尼，比瑞利阻尼可能更加合理，但是由于其阻尼矩阵为完全密集的矩阵，也会带来计算时间大量增加的弊端。