

单悬索的基本理论与 SAP2000 应用

筑信达 张志国

索与常规的梁、柱等杆件的主要区别在于其几何形状的可变性，即：索的几何形状随荷载的不同而变化且变形较大，两者之间存在显著的非线性关系。因此，关于索的结构分析应按照变形后的几何形状和尺寸建立平衡方程、计算结构内力以及确定几何形状。除此之外，索作为柔性构件在荷载作用下只产生轴向拉力，不产生弯矩、扭矩、剪力和轴向压力。从这个角度来讲，索的受力更加合理，在充分利用高强度钢材的前提下大大减轻结构自重，故多用于悬索桥、斜拉桥以及悬索屋盖等大跨度的空间结构。

1 分布荷载作用下的单悬索

单悬索在竖向分布荷载作用下的几何形状（也称“线形”）与水平张力之间的平衡微分方程，如下所示。该方程用于描述某一特定状态下 q 、 y 和 F_H 三者之间的数学关系。与常规的梁、柱等杆件所不同的是，在外荷载 q 已知的情况下，上述方程无法确定唯一的悬索线形 y 和水平张力 F_H 。

$$F_H \frac{d^2 y}{dx^2} + q(x) = 0 \quad (1)$$

式中， F_H 为悬索张力的水平分量（即水平张力）； $q(x)$ 为作用于悬索的竖向分布荷载； $y(x)$ 为悬索线形的函数表达式。

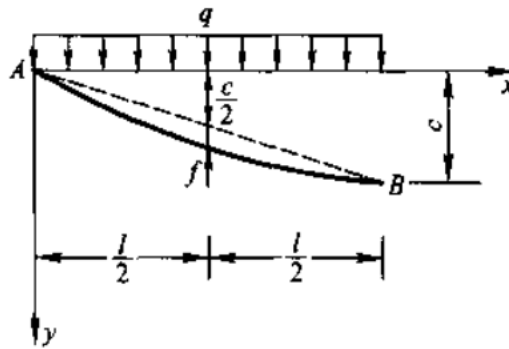


图 1 沿悬索跨度分布的均布荷载

如图 1 所示，对于沿悬索跨度分布的均布荷载 q = 常量，式 (1) 通过两次积分并考虑 A、B 两点的边界条件即可得到悬索线形的函数表达式，如下所示。可以看出，悬索线形与水平张力 F_H 互为结果，即悬索线形为抛物线族。

$$y = \frac{q}{2F_H} x(l-x) + \frac{c}{l} x \quad (2)$$

悬索跨中垂度 f 与水平张力 F_H 之间的关系，如下所示：

$$F_H = \frac{ql^2}{8f} \quad (3)$$

悬索中各点张力 F_T 与悬索线形之间的关系，如下所示：

$$F_T = F_H \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (4)$$

悬索长度 s 与悬索线形之间的关系，如下所示：

$$s = \int_A^B ds = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \approx l \left(1 + \frac{c^2}{2l^2} + \frac{8f^2}{3l^2} \right) \quad (5)$$

可以看出，在水平张力 F_H 、跨中垂度 f 、悬索张力 F_T 或悬索长度 s 任一参数已知的情况下，根据式 (2) ~ (5) 即可确定唯一的悬索线形（抛物线）。

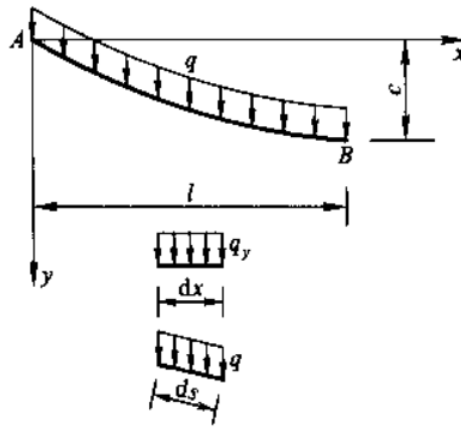


图 2 沿悬索长度分布的均布荷载

如图 2 所示，对于沿悬索长度分布的均布荷载 q =常量，式 (1) 通过两次积分并考虑 A、B 两点的边界条件即可得到悬索线形的函数表达式，如下所示。同样，悬索线形与水平张力 F_H 互为结果，此时的悬索线形为悬链线族。

$$y = \frac{F_H}{q} \left[ch\alpha - ch\left(\frac{2\beta}{l}x - \alpha\right) \right] \quad (6)$$

式中， $\alpha = \operatorname{arcsch}\left[\frac{\beta c/l}{sh\beta}\right] + \beta$, $\beta = \frac{ql}{2F_H}$

悬索跨中垂度 f 与水平张力 F_H 之间的关系，如下所示：

$$f = \frac{F_H}{q} [ch\alpha - ch(\beta - \alpha)] - \frac{c}{2} \quad (7)$$

悬索中各点张力 F_T 与悬索线形之间的关系，如下所示：

$$F_T = F_H \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (8)$$

悬索长度 s 与悬索线形之间的关系，如下所示：

$$s = \int_A^B ds = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{2F_H}{q} sh\beta \times ch(\beta - \alpha) \quad (9)$$

同理，在水平张力 F_H 、跨中垂度 f 、悬索张力 F_T 或悬索长度 s 任一参数已知的前提下，根据式 (6) ~ (9) 即可确定唯一的悬索线形（悬链线）。

通常情况下，单悬索设计既可以根据工程要求确定索的垂度，也可以根据应力条件确定索的张力，据此即可计算索的初始状态，在此基础上进一步完成工作状态下的分析和计算。其中，前者为已知线形求索力问题；后者为已知张力找形问题。

2 SAP2000 形状计算器

如图 3 所示，单悬索的形状设计器（Shape Calculator）可辅助用户高效便捷地绘制或编辑索对象。根据用户选择的悬索类型和输入参数，SAP2000 自动计算单悬索的初始状态（即变形前的悬索线形），包括悬索的长度或相对长度、最大垂度以及最低点垂度。默认情况下，变形前的悬索长度等于起点和终点的直线距离（即弦长）。

变形前的悬索长度与弦长的相对大小与悬索的受力状态密切相关。简单来讲，当前者大于后者时，悬索处于松弛状态，垂度较大，不可忽略；当前者小于后者时，悬索处于张紧状态，垂度较小，可忽略。松弛悬索的内力和变形均为零，需要在后续的非线性工况中施加自重或其它横向荷载以确定其初始状态；张紧悬索则存在预应力，在后续工况中将对结构整体的刚度和平衡产生影响。

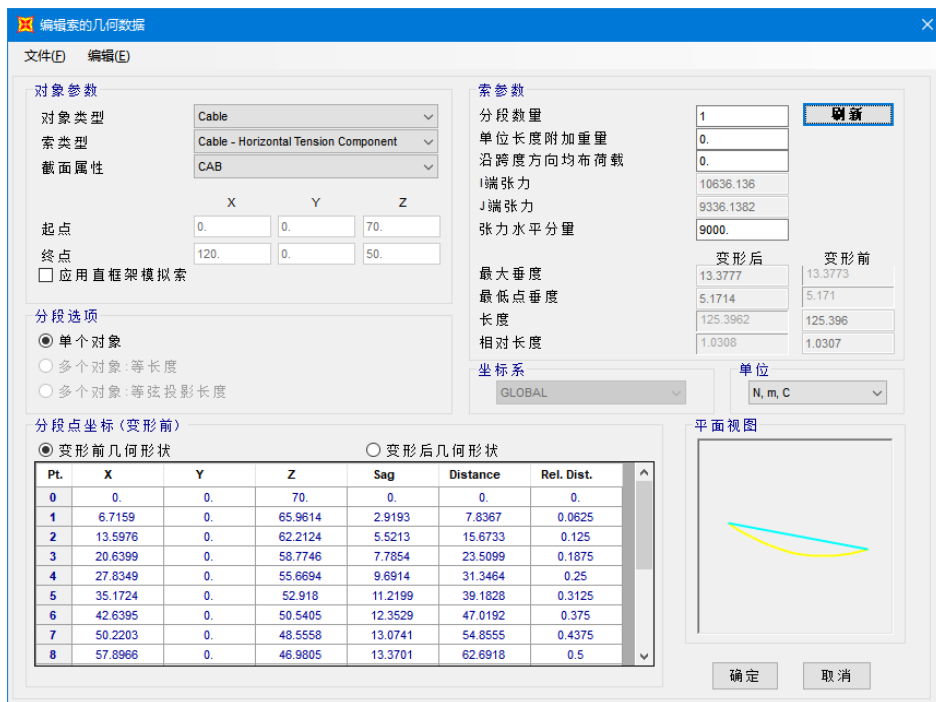


图 3 索对象的形状计算器

如前文所述，在已知竖向分布荷载的前提下，悬索的线形和张力可根据某一参数加以确定，如水平张力、跨中垂度、悬索长度等。在图 3 所示的形状计算器中，用户既可以指定多种形式的竖向分布荷载，也可以选择各种单一的参数来确定悬索线形。具体如下：

(1) 竖向分布荷载

用于计算悬索线形的竖向分布荷载由三部分组成，即：自重荷载、单位长度的附加重量以及沿跨度方向的均布荷载。由于自重荷载始终包含在悬索线形的计算中，故形状计算器未提供对应的选项和输入框。如需忽略自重荷载，建议将材料属性中重量密度修改为零。另外，【单位长度附加重量】即沿索长度的均布荷载，也就是线重量（量纲为 F/L）。

(2) 悬索内力

除常规的水平张力外，起始端（I 端）张力和终止端（J 端）张力也可用于确定悬索线形。从数学角度讲，对起始端或终止端张力的函数进行求导并取零，即可计算其最小值。从物理角度来讲，索长增加则自重增加，张力必然增加；索长减小则悬索张紧，张力也必然增加。故可定性判断，必然存在唯一的悬索线形满足起始端或终止端张力最小的要求。因此，形状计算器可基于 I 端或 J 端张力的最小值计算悬索线形，用户也可以以此张力为下限，避免指定更小的无效张力值。

(3) 几何参数

虽然形状计算器没有提供跨中垂度 f 用于计算悬索线形，但基于最大垂度 U_{MAX} 和最低点垂度 U_{LOW} 同样可以快速便捷地确定悬索线形。最大垂度即悬索与弦长之间最大的竖向间距，最低点垂度即悬索最低点与弦长最低点之间的竖向间距，如图 4 所示。



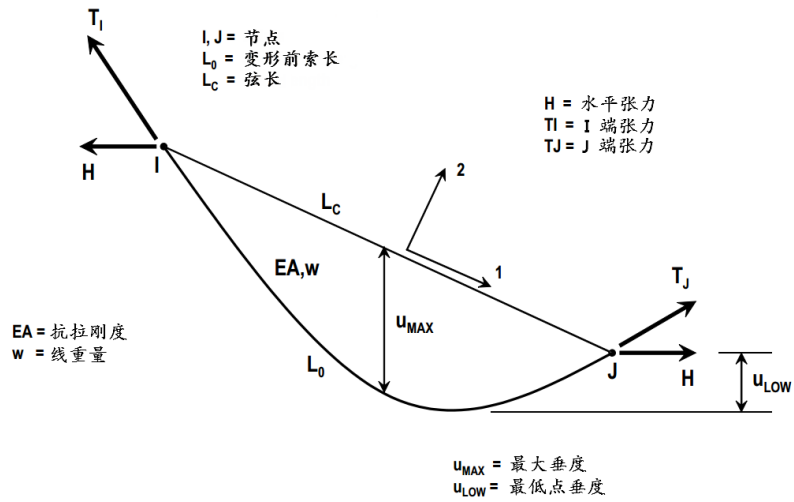


图 4 悬索线形示意图

3 几何非线性分析

SAP2000 中的索单元具有拉伸刚化和位移的几何非线性属性，可用于模拟自重作用下索的悬链线行为。因此，涉及索单元的荷载工况多采用非线性分析，也可以基于非线性工况的终止刚度进行线性分析。由于索单元内置几何非线性属性，故用户非线性工况中无需为此勾选【P-Delta 和大位移效应】选项。但是，如果用户需要考虑除索单元之外其它单元（如框架单元、壳单元等）的几何非线性，建议勾选【P-Delta】或【P-Delta 和大位移效应】选项。

松弛状态下的悬索在未承受荷载的情况下无稳定的唯一线形，故基于零初始条件的线性分析毫无意义，用户应尽量避免。同理，在线性工况前置的非线性工况中，用户必须对松弛的悬索施加自重荷载、温度荷载或其它横向荷载以激发其几何刚度和稳定性。需要注意的是，用户在形状计算器中考虑的悬索自重或其它附加荷载仅用于计算悬索线形，并非在实际的结构分析中所施加的荷载。因此，如果用户需要计算悬索在上述荷载作用下的内力或变形，应在非线性工况中指定相应的荷载模式。

最后，为了改善非线性分析的收敛性，建议用户在荷载工况的非线性参数中增加 NR 迭代的最大次数，如 25 或以上。对于单个索对象，用户无需划分过多的单元数量。事实上，单个索对象的单元数量越少且荷载增量越大，非线性分析的收敛性反而更佳！

4 案例：索塔结构

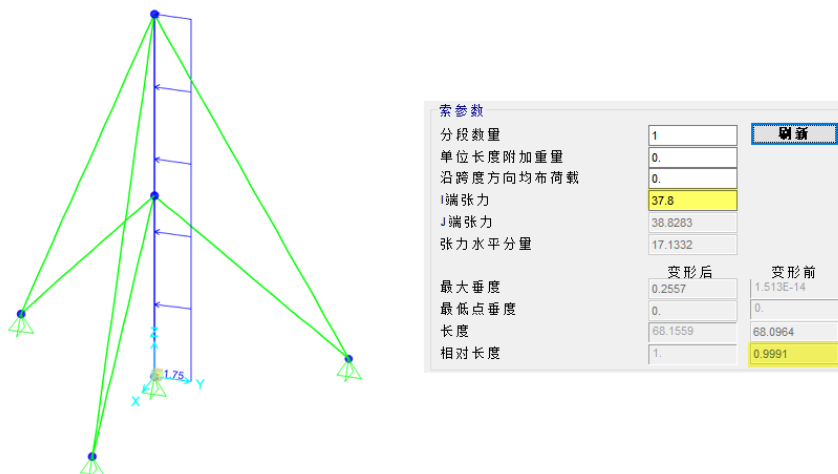


图 5 索塔结构及索参数



如图 5 所示的索塔结构，斜拉索的预拉力为 37.8kN，桅杆沿 Y 轴负向的风荷载为 1.75kN/m。从索变形前后的相对长度可以看出，斜拉索处于张紧状态，即：0.9991→1.0。其中，风荷载对应于框架对象分布荷载；预拉力对应于索对象的目标力荷载。由于全部斜拉索的张拉力均在接地端施加，而根据索对象的绘制过程可知接地端即起始节点 1，故相对距离为零。关于目标力荷载的指定，如图 6 所示。

对于框架、钢束或索单元的目标力荷载，程序内部以多次迭代的方式施加轴向变形荷载，最终达到轴力目标值。目标力荷载与其它荷载的区别在于目标力并非增量荷载。也就是说，目标力只是当前工况或当前阶段结束时构件轴力的目标值，但程序在分析过程中所施加的变形荷载可能为正值、负值或零，具体数值往往取决于分析开始时结构的内力状态。

针对索的几何非线性属性，用户应分别定义预拉力和风荷载两个非线性荷载工况。其中，预拉力工况中应包括结构自重和目标力；风荷载工况则在继承预拉力工况的基础上，施加作用于桅杆的风荷载。由于桅杆的几何非线性可以忽略，故上述两个工况的几何非线性选项均为【无】即可。



图 6 斜拉索的目标力荷载

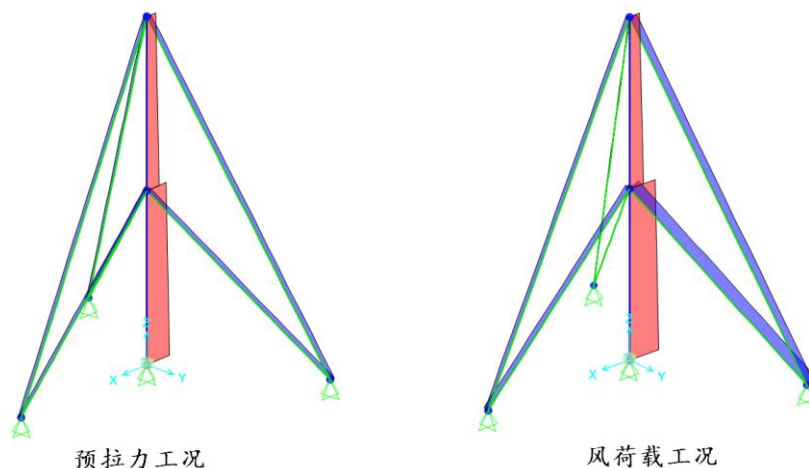


图 7 结构内力图对比

如图 7 所示，预拉力工况中各条斜拉索在接地端的轴力均为 37.795kN，与目标力（37.8kN）基本一致。而在风荷载工况中，考虑到风荷载的作用方向，各条斜拉索的拉力均发生不同变化。以上述三条长索为例，三者在地端端的轴力分别为 64.823kN、38.785kN 和 11.895kN，与预拉力相比，有增有减。从本案例中可以看出，SAP2000 中的索单元可以考虑柔性索固有的应力刚化和大位移效应，同时求解与之相关的几何非线性问题。

4 小结

以上着重介绍了单悬索在竖向分布荷载作用下的平衡微分方程及其常见解答，并据此与 SAP2000 形状计算器中的多个重要参数进行一一对照。然后，针对索单元的非线性属性以及非线性分析中需要注意的事项进行了全面阐释。最后，以一个简化的索塔模型为例，展现了 SAP2000 在几何非线性分析中的适用性和可靠性。希望本文可以帮助各位读者深刻理解并灵活应用 SAP2000 的相关功能，切实有效地处理各种实际问题。